Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: Cálculo II Unificado - MAC128
Data: 15/12/2015

Primeira Prova

1. Levando em conta a equação diferencial $\frac{du}{dx} = xu^2$, considere as afirmativas:

I. A equação diferencial é separável

II. A equação diferencial é linear

III. Para $x > 0$ a função $u(x)$ é crescente

IV. Se $u(0) = -2$ a solução é $u(x) = -\frac{2}{x^2+1}$

V. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{x}$

Assinale a alternativa correta:

(a) Apenas as afirmativas II e V são falsas
(b) Apenas as afirmativas **I** e **IV** são corretas
(c) Apenas a afirmativa **II** é falsa
(d) Apenas as afirmativas **I** e **III** são corretas
(e) Todas as afirmativas são corretas

2. Quantas soluções constantes tem a equação diferencial $y' = xy^2 - x$?

(a) Duas soluções constantes
(b) Uma solução constante
(c) Nenhuma solução constante
(d) Infinitas soluções constantes
(e) Nenhuma das demais alternativas

3. Qual o valor de a de modo que $y = e^{-x}$ seja solução de $y'' + ay' + y = 0$?

(a) $a = 2$
(b) $a = -2$
(c) $a = 1$
(d) $a = -1$
(e) $a = 0$

4. Um fator integrante da equação diferencial $xy' = 2y + e^x$ é:

(a) $2x^{-2}$
(b) x^2
(c) e^{2x}
(d) e^{-2x}
(e) Nenhuma das demais alternativas

5. Um tanque inicialmente contém 1000 L de água pura. No instante $t = 0$, é introduzida no tanque água salgada com uma concentração de $0,2$ Kg/L a uma vazão de $(2 - \sin t)$ L/min, ao passo que a mistura homogênea sai do tanque a uma vazão de 2 L/min. Se $Q(t)$ é a quantidade (em Kg) de sal no tanque após t minutos, então:

(a) $\frac{dQ}{dt} = 0,2(2 - \sin t) - \frac{2Q}{999 + \cos t}$
(b) $\frac{dQ}{dt} = 0,2(2 - \sin t) - \frac{2Q}{1000 + \cos t}$
(c) $\frac{dQ}{dt} = 0,2(2 - \sin t) - \frac{2Q}{1000 - \sin t}$
(d) $\frac{dQ}{dt} = 0,2(2 - \sin t) - \frac{Q}{1000 + \cos t}$
(e) $\frac{dQ}{dt} = 0,2(2 - \sin t) - \frac{2Q}{999 - \sin t}$

6. Para que a superfície de equação
$-x^2 + ay^2 + z^2 + 2y = 3$
seja um cone, o valor da constante a deve ser:

(a) $a = -1/3$
(b) $a = 1/3$
(c) $a = -2/3$
(d) $a = 2/3$
(e) $a = -1$

7. Considere a curva $\mathcal{C}$ parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\cos(3t), \sin(3t), 4t)$, $0 \le t \le b\pi$. Qual o valor da constante b de modo que o comprimento de $\mathcal{C}$ seja 15π ?

(a) $b = 3$
(b) $b = 15/\sqrt{17}$
(c) $b = 2$
(d) $b = 1$
(e) $b = 17/\sqrt{15}$

8. A equação cartesiana do plano que contém as duas retas parametrizadas por
$\mathbf{r_1}(t) = (1 + t, 2t, -1 + 3t)$ e
$\mathbf{r_2}(s) = (-s, s + 1, 2s + 1)$ (t, $s \in \mathbb{R}$) é:

(a) $x - 5y + 3z = -2$
(b) $x - 5y + 3z = 2$
(c) $x - 5y + 3z = 0$
(d) $x + y - z = 2$
(e) $x + 3y - z = 2$

9. Uma partícula parte do ponto $(0, 0)$ em $t = 0$. Se $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ e $\mathbf{v}(t) = (2y(t), t)$ são, respectivamente, os vetores posição e velocidade da partícula em $t \ge 0$, qual a distância percorrida pela partícula de $t = 0$ a $t = 1$?

(a) $\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$

(b) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
(c) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$
(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

10. A curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, está contida em qual superfície?

(a) cone
(b) parabolóide
(c) cilindro
(d) hiperbolóide de uma folha
(e) elipsóide

11. Seja $\mathcal{S}$ a superfície constituída por todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que a distância de (x, y, z) ao eixo z é igual à distância de (x, y, z) ao ponto $(1, 0, 0)$. Nesse caso, $\mathcal{S}$ é um

(a) cilindro
(b) cone
(c) parabolóide
(d) elipsóide
(e) hiperbolóide de uma folha

12. A interseção dos planos $x+y+z=1$ e $-x-y+z=1$ é a reta parametrizada por:

(a) $\mathbf{r}(t) = (t, -t, 1), \quad t \in \mathbb{R}$
(b) $\mathbf{r}(t) = (2t, -2t, 1+t), \quad t \in \mathbb{R}$
(c) $\mathbf{r}(t) = (t, t, 1+t), \quad t \in \mathbb{R}$
(d) $\mathbf{r}(t) = (-t, -t, 1+t), \quad t \in \mathbb{R}$
(e) $\mathbf{r}(t) = (0, t, 1+t), \quad t \in \mathbb{R}$

13. Considere a curva $\mathcal{C}$ parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (t^2+1, \mathrm{e}^t)$, $t \in \mathbb{R}$. O ponto P tal que a reta tangente a $\mathcal{C}$ em P passe pela orígem é:

(a) $(2, \mathbf{e})$
(b) $(1, 1)$
(c) $(2, \mathrm{e}^{-1})$
(d) $(5, \mathrm{e}^{2})$
(e) $(5, \mathrm{e}^{-2})$

14. A curva $\mathcal{C}$, interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2x$, pode ser parametrizada por:

(a) $\mathbf{r}(t) = (1+\cos(t), \mathbf{sen}(t), 2+2\cos(t))$**,** $t \in [0, 2\pi]$
(b) $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t), 2\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
(c) $\mathbf{r}(t) = (2+\cos(t), 2+\mathrm{sen}(t), 4+2\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
(d) $\mathbf{r}(t) = (2+\cos(t), \cos(t), 4+2\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$
(e) $\mathbf{r}(t) = (2\cos^2(t), \mathrm{sen}(t), 4\cos^2(t))$, $t \in [-\pi, \pi]$